الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية المسيلة

إمتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي — ثانوية: المجاهد طويري محمد

الشعبة: تقني رياضي -هندسة الطرائق- — دورة ماي 2021

إختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 3^n على 5.

II) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث: u_0 و r عددان طبيعيان.

1) اوجد كل من u_0 و r، علما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما ويحققان: $(u_0)^2 = u_{10} - u_1$.

2) عبر بدلالة العدد الطبيعي n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3) عبر بدلالة العدد الطبيعي n عن الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.

4) عين العدد الطبيعي m حيث: $2P_m = 2023!$، ثم تحقق أن $3^m \equiv 1[5]$.

5) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} 2S_n + 8 \equiv 3^{1962}[5] \\ 10 < n < 30 \end{cases}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $p(z) = z^3 + 8$

1) احسب $p(-2)$، ثم عين العددين الحقيقين α و β بحيث من أجل كل $z \in \mathbb{C}$: $p(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_c = -2$.

1) اكتب كلا من: z_A، z_B و z_c على الشكل الأسي.

2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

ج) تحقق أن النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC.

3) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث: $z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ)، ثم عين المجموعة (Γ).

التمرين الثالث: (4 نقاط)

✍ يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، كل الكرات متماثلة ولانفرق بينها باللمس. ونسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا دفعة واحدة.

1) احسب إحتمال كل من الأحداث التالية:

A: " الكرات المسحوبة كلها حمراء ".

B: " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط في السحب ".

C: " الحصول على كرة بيضاء على الأقل ".

D: " الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة ".

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث: $(n \geq 2)$، ثم نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع.

نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة، وسحب كرة سوداء يساوي $(+5)$ نقطة. وليكن X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها.

أ) اكتب قانون إحتمال المتغير العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب) عين قيمة n حتي تكون اللعبة عادلة.

ج) ماهو عدد الكرات السوداء المختارة حتى تكون اللعبة مربحة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.5 < \alpha < 2.7$. ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب x.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$. ثم فسر النتائج هندسيا.
ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.
ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
ج) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $x\in\mathbb{R}-\{1\}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة β حيث: $-1<\beta<0$.

5) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{6}{(\alpha-1)^2}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) احسب $f(0)$. ثم ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم السابق.

7) ليكن m وسيط حقيقي، عين بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=x+m$ حلين مختلفين.

III) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1;-1\}$ كما يلي: $h(x)=f(|x|)$. و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) بين أن h دالة زوجية.

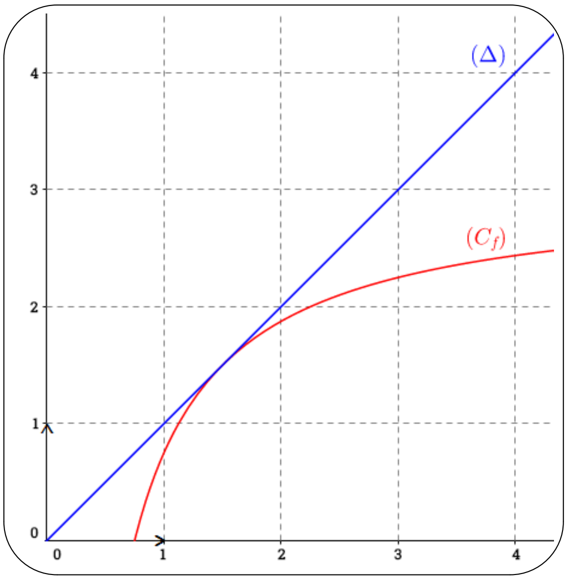
2) اشرح كيفية إنشاء (C_h)، ثم أنشئه.

إنتهى المـوضـوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3 - \frac{9}{4x}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.
المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.



1) أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
2) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{3}{2}$.
3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة، وعين نهايتها.
4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:
$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$.
أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{2}{3}$.
ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.
5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع التالي: $S_n = u_nv_n + u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + \ldots + u_{n+2021}v_{n+2021}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجيول $(x;y)$: $3x - 5y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ) عين $(x_0;y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق $\ln(x_0 - y_0) = 0$.
ب) استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان صحيحان و λ العدد الصحيح الذي يحقق: $\begin{cases} \lambda = 3b + 2 \\ \lambda = 5a + 3 \end{cases}$.

أ) بين أن $(b;a)$ حل المعادلة (E).
ب) عين باقي القسمة القليدية للعدد λ على 15.

3) n عدد طبيعي يحقق: $\begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$.

- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2021$.

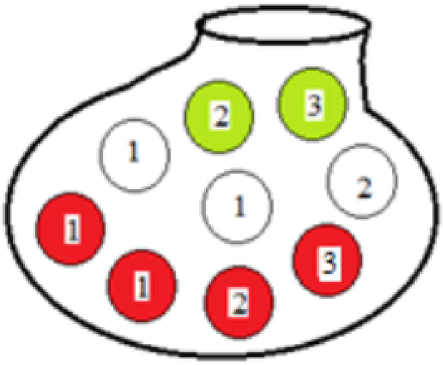
4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 3 \alpha 03}$ في نظام تعداد أساسه 6.

أ) عين α و β حيث الثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E).

ب) اكتب N في النظام العشري.

التمـرين الثالث: (05 نقاط)

I) كيس يحوي تسع كريات (لا نفرق بينها باللمس)، ثلاثة بيضاء مرقمة 1 ، 1 و 2 وأربعة حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 و 3 واثنان خضراء مرقمة 2 و 3.
نسحب عشوائيا على التوالي بدون ارجاع 3 كريات من هذا الكيس.



1) ماهو عدد السحبات الممكنة.

2) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

A: " سحب كرية من كل لون ".
B: " سحب كريات من نفس اللون ".
C: " سحب كريات تحمل نفس الرقم ".
D: " سحب كريات تحمل نفس الرقم و مختلفة في اللون ".

II) نسحب من الكيس السابق كريتين في آن واحد ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين اللذان تحملانهما الكريتين المسحوبتين.

1) عين قيم المتغير العشوائي X.

2) حدد قانون احتمال X.

3) احسب كل من الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة العدد f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + e - \dfrac{2\ln(x)}{x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا. و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$.

3) استنتج إشارة $f'(x)$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

5) بين انه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ)، ثم جد معادله له.

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث: $2 < \beta < 2.1$، ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$.

7) ارسم المستقيم (Δ)، المماس (T) و (C_f).

8) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا حسب m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x: $x(e-m) = \ln(x^2)$.

إنتهى الموضوع الثاني

الارادة الصادقة للإنسان...
تشبه قوة خفية تسير خلف ظهره، وتدفعه دفعا للأمام على طريق النجاح...
وتتنامى مع الوقت حتى تمنعه من التوقف أو التراجع.

☺ بالتوفيق والنجاح في شهادة بكالوريا **2021**. ☺
أتمنى لكم حياة جامعية أفضل ...

الأستاذ
فراحتية المحفوظ
مادة الرياضيات

تصحيح المـوضـوع الأول

حل التمـرين الأول 04 ن

I) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي

القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5: 1 ن

◁ من أجل $n=0$ نجد: $3^0 \equiv 1[5]$

◁ من أجل $n=1$ نجد: $3^1 \equiv 3[5]$

◁ من أجل $n=2$ نجد: $3^2 \equiv 4[5]$

◁ من أجل $n=3$ نجد: $3^3 \equiv 2[5]$

◁ من أجل $n=4$ نجد: $3^4 \equiv 1[5]$

ومنه بواقي القسمة تشكل متتالية دورية دورها 4. نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	3	4	2	$[5]$

ومنه:

◁ بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.

◁ بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 3.

◁ بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.

◁ بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 2.

II)

① إيجاد كل من u_0 و r: 0.5 ن

علما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما ويحققان:

$(u_0)^2 = u_{10} - u_1$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = u_0 + nr$.

ومنه: $(u_0)^2 = u_{10} - u_1$

معناه: $(u_0)^2 = (u_0 + 10r) - (u_0 + r)$

معناه: $(u_0)^2 = 9r$.

لدينا: $(u_0)^2 = 9r$ معناه: u_0 يقسم $9r$.

وبما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص u_0 يقسم 9 ومنه: $u_0 = \{1;3;9\}$.

◁ من أجل: $u_0 = 1$ نجد: $9r = 1$ أي: $r = \frac{1}{9}$ مرفوض لأن r عدد طبيعي.

◁ من أجل: $u_0 = 3$ نجد: $9r = 9$ أي: $r = \frac{9}{9}$ ومنه: $r = 1$ مقبول لأن 3 و 1 أوليان فيما بينهما.

◁ من أجل: $u_0 = 9$ نجد: $9r = 81$ أي: $r = \frac{81}{9}$ ومنه: $r = 9$ مرفوض لأن 9 و 9 غير أوليان فيما بينهما.

② التعبير بدلالة n عن المجموع S_n: 0.5 ن

لدينا من أجل كل عدد الطبيعي n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

ومنه: $S_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)$

أي: $S_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+6)$.

③ التعبير بدلالة n عن الجداء P_n: 0.5 ن

لدينا من أجل كل عدد الطبيعي n:

$$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$$

ومنه: $P_n = u_0 \times (u_0 + r) \times \cdots \times (u_0 + nr)$

أي: $P_n = 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n+3)$

ومنه: $1 \times 2 \times P_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n+3)$.

إذن: $2! \times P_n = (n+3)!$ ومنه: $P_n = \frac{(n+3)!}{2!}$.

④ تعيين العدد الطبيعي m حيث: $2P_m = 2023!$:

0.25 ن

لدينا: $2P_m = 2023!$ معناه: $(m+3)! = 2023!$

أي: $m = 2020$.

• التحقق أن $3^m \equiv 1[5]$: 0.25 ن

من السؤال الأول نقسم العدد 2020 على الدور 4 فنجد:

$2020 = 505 \times 4$ أي من الشكل $4k$.

ومنه: $3^{2020} \equiv 1[5]$.

5 تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:

$\begin{cases} 2S_n + 8 \equiv 3^{1962}[5] \\ 10 < n < 30 \end{cases}$. 1 ن

لدينا: $3^{1962} \equiv 4[5]$ ومنه: $2S_n + 8 \equiv 4[5]$

أي: $(n+1)(n+6) + 8 \equiv 4[5]$

أي: $n^2 + 7n + 6 + 8 \equiv 4[5]$

أي: $n^2 + 7n + 14 \equiv 4[5]$.

ولدينا: $7n \equiv 2n[5]$ و $14 \equiv 4[5]$.

إذن: $n^2 + 2n + 4 \equiv 4[5]$ أي: $n^2 + 2n \equiv 0[5]$

أي: $n(n+2) \equiv 0[5]$

معناه $n \equiv 0[5]$ أو $(n+2) \equiv 0[5]$

معناه $n = 5k$ أو $n = 5k+3$.

لكن: $10 < n < 30$

ومنه: $10 < 5k < 30$ أي $2 < k < 6$

أو $10 < 5k+3 < 30$ أي $7 < 5k < 27$

أي $\frac{7}{5} < k < \frac{27}{5}$.

إذن: $k \in \{2;3;4;5\}$

وعليه: $n \in \{15;20;25;13;18;23;28\}$.

حل التمـرين الثاني 05 ن

(I

1 حساب $p(-2)$: 0.25 ن

$p(z) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$.

• تعين العددين الحقيقين α و β بحيث من أجل كل $z \in \mathbb{C}$: $p(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$ 0.5 ن

لدينا:

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-2)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 + (\alpha+2)z^2 + (2\alpha + \beta)z + 2\beta \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\alpha = -2$ و $\beta = 4$.

إذن: $p(z) = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$: 0.5 ن

لدينا: $p(z) = 0$ معناه: $(z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$

معناه: $\begin{cases} (z+2) = 0 \\ (z^2 - 2z + 4) = 0 \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} z = -2 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

نحل العادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$

أي نجد: $\Delta = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2$.

إذن للمعادلة حلان مترافقان هما:

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

وبالتالي: $S = \{-2; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$.

(II

1 كتابة كلا من: z_A، z_B و z_c على الشكل الأسي:

0.75 ن

لدينا: $z_A = |z_A| e^{\arg(z_A) i} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ولدينا: $z_B = |z_B| e^{\arg(z_B) i} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ولدينا: $z_C = |z_C| e^{\arg(z_C) i} = 2e^{i\pi}$.

2 أ كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري:

0.5 ن

لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} &= \frac{1 + i\sqrt{3} + 2}{1 - i\sqrt{3} + 2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{12} = \frac{9 - 3 + 6i\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

• كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي: 0.5 ن

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

ومنه: $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب استنتاج طبيعة المثلث ABC: 0.25 ن

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$.

إذن: المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ج التحقق أن O هي مركز ثقل المثلث ABC: 0.5 ن

النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC

معناه أن O هي مرجح الجملة المثقلة:

$\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$.

لنحسب لاحقة مرجح الجملة:

$$z = \frac{z_A + z_B + z_c}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} - 2}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

وبالتالي O هي مركز ثقل المثلث ABC

3 تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$ 0.5 ن

لدينا: $(z_A)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n \times e^{i\frac{n\pi}{3}}$

و $(z_B)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n \times e^{-i\frac{n\pi}{3}}$

إذن: $(z_A)^n = (z_B)^n$

معناه: $\arg\left[(z_A)^n\right] = \arg\left[(z_B)^n\right]$

أي: $\frac{n\pi}{3} = -\frac{n\pi}{3} + 2k\pi$ أي: $\frac{n}{3} = -\frac{n}{3} + 2k$

أي: $\frac{n}{3} = \frac{-n + 6k}{3}$

أي: $3n = -3n + 18k$ ومنه: $6n = 18k$

وبالتالي: $n = 3k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

4 لدينا $(\Gamma) : z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+^*$

• التحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ): 0.25 ن

لدينا: $A \in (\Gamma)$ معناه:

$z_A + 2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

وبالتالي: $A \in (\Gamma)$.

• تعيين المجموعة (Γ): 0.5 ن

لدينا: $(\Gamma) : z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}}$ أي: $(\Gamma) : z - z_C = ke^{i\frac{\pi}{6}}$

ومنه: $\arg(z - z_C) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

معناه: $(\vec{u};\overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

ومنه المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم الذي مبدأه النقطة C ويشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل الفواصل (المحور الحقيقي) بإستثناء النقطة C.

حل التمرين الثالث 04 ن

1 حساب إحتمال كل من الأحداث التالية: 1.5 ن

عدد الحالات الممكنة هو: C_8^3

ومنه: $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

ومنه نجد: $p(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$.

ونجد: $p(B) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}$.

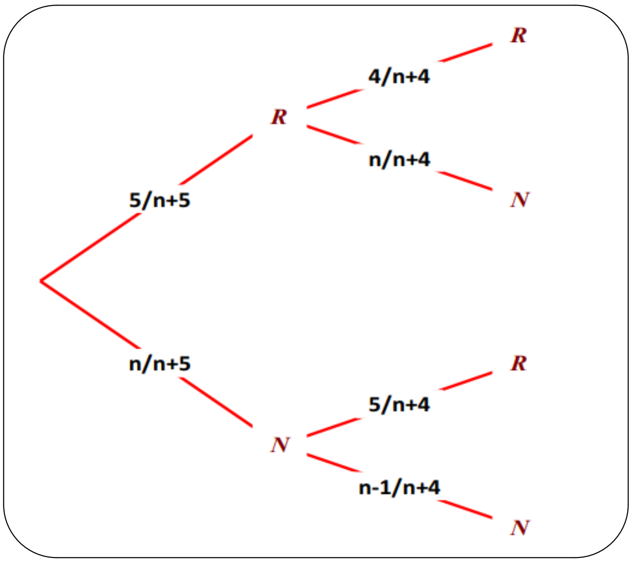
نلاحظ أن الحدث C هو الحدث العكسي للحدث A،

أي: $p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$.

الحدث D هو الحدث المستحيل، ومنه: $p(D) = 0$.

2 **ا** قانون إحتمال المتغير العشوائي X: **1 ن**

يمكن أن نستعين بشجرة الإحتمالات التالية:



ومنه قيم المتغير العشوائي هي:

$X = \{-20; -5; 10\}$.

ومنه قانون إحتمال:

X_i	-20	-5	10
$p(X_i)$	$\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{n^2-n}{(n+5)(n+4)}$

⋆ أو يمكن إستعمال المبدأ الأساسي للعد.

سحب كرتين على التوالي بدون إرجاع لدينا ترتيبة ومنه:

$$p(x=-20) = p(\{RR\}) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$p(x=-5) = p(\{RN\}) = 2\frac{A_5^1 \times A_n^1}{A_{n+5}^2} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$p(x=10) = p(\{NN\}) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{n^2-n}{(n+5)(n+4)}$$

• حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: **0.5 ن**

لدينا:

$$E(X) = \frac{-400-50n+10(n^2-n)}{(n+5)(n+4)} = \frac{10n^2-60n-400}{(n+5)(n+4)}$$

ب تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة: **0.5 ن**

تكون اللعبة عادلة إذا كان: $E(X) = 0$

أي: $10n^2 - 60n - 400 = 0$

نحسب المميز Δ نجد: $\Delta = 19600$

ومنه للمعالة حلان:

$$n_1 = \frac{60-\sqrt{19600}}{2\times 10} = \frac{-80}{20} = -40$$

(مرفوض).

أو $n_2 = \dfrac{60+\sqrt{19600}}{2\times 10} = \dfrac{200}{20} = 10$.

تكون اللعبة عادلة من أجل $n = 10$.

ج عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة: **0.5 ن**

تكون اللعبة مربحة إذا كان: $E(X) > 0$

أي: $10n^2 - 60n - 400 > 0$ ومنه: $n > 10$.

إذن ينبغي أن نضع على الأقل 11 كرة سوداء حتى تكون اللعبة مربحة.

حل التمـرين الرابع **07 ن**

(I

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: **0.25 ن**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$: 0.5 ن

- حساب $g'(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث:

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

- دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 0$

معناه: $3x^2 - 6x + 3 = 0$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ.

$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0$ ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$.

ومنه: $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$.

- اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) \geq 0$، ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g: 0.25 ن

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.5 < \alpha < 2.7$: 0.25 ن

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

وبالأخص على المجال $]2.5;2.7[$.

ولدينا: $f(2.5) = -0.6$ و $f(2.6) = 0.1$.

أي: $f(2.5) \times f(2.7) < 0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2.5;2.7[$.

- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب العدد الحقيقي x:

0.25 ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

1 أ حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$: 0.5 ن

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

لأن: لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن: $(x-1)^2 \overset{>}{\to} 0$

و $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \to 2$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

لأن: لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن: $(x-1)^2 \overset{>}{\to} 0$

و $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \to 2$.

- تفسير النتائج هندسيا: 0.25 ن

لدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

ب حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: 0.25 ن

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

2 أ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$f(x) = ax + b + \frac{2}{(x-1)^2}$: 0.5 ن

لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{2}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(ax+b)(x-1)^2+2}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^3+x^2(-2a+b)+x(a-2b)+b+2}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-3 \\ a-2b=3 \\ b+2=1 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

ومنه: $f(x)=x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$.

ب تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) مع تعيين معادلة له: 0.25 ن

نضع $y=x-1$ نجد: $f(x)=y+\frac{2}{(x-1)^2}$.

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

ج دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): 0.25 ن

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$:

$f(x)-y=\frac{2}{(x-1)^2}>0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f على $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:

• تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f: 0.25 ن

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(x-1)^3-4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام.

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$

• إتجاه تغير الدالة f: 0.25 ن

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجال $]-\infty;1[$ والمجال $[\alpha;+\infty[$.

ومتناقصة تماما على المجال $]1;\alpha]$.

• جدول تغيرات f: 0.25 ن

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4 بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة β حيث: $-1<\beta<0$: 0.25 ن

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

وبالأخص على المجال $]-1;0[$.

ولدينا: $f(-1)=-1.5$ و $f(0)=1$.

أي: $f(-1)\times f(0)<0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1<\beta<0$.

5 تبيين أن $f(\alpha)=\frac{6}{(\alpha-1)^2}$: **0.25 ن**

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2}=0$.

لدينا سابقا: $g(\alpha)=0$ إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha-1+\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2+2-6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{0}{(\alpha-1)^2}=0 \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: **0.25 ن**

لدينا: $2.5<\alpha<2.7$

معناه: $1.5<\alpha-1<1.7$

معناه: $2.25<(\alpha-1)^2<2.89$

معناه: $\frac{1}{2.89}<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<\frac{1}{2.25}$

معناه: $\frac{6}{2.89}<\frac{6}{(\alpha-1)^2}<\frac{1}{2.25}$

معناه: $2.07<f(\alpha)<2.66$.

6 حساب $f(0)$: **0.25 ن**

لدينا: $f(0)=0-1+\frac{2}{(0-1)^2}=1$.

- رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f): **0.5 ن**

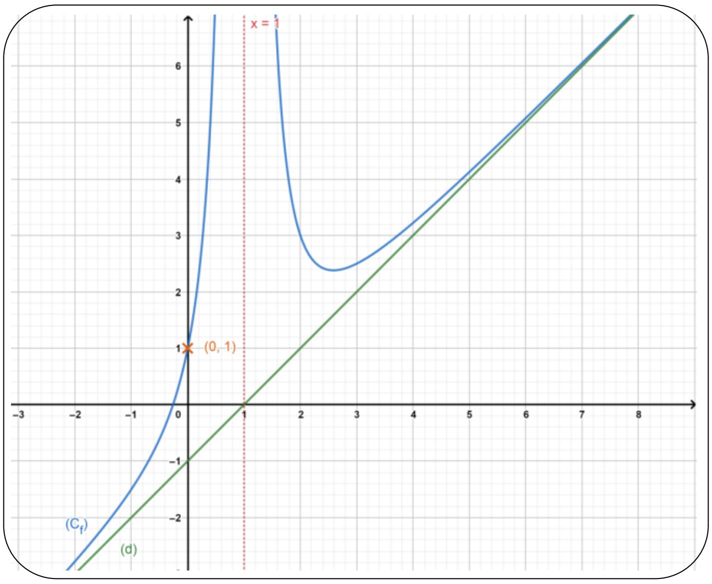
خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

◁ نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$.

◁ نرسم المستقيم المقارب المائل Δ ذو المعادلة $y=x-1$.

◁ نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy').

◁ ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f).



7 تعيين بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=x+m$ حلين مختلفين: **0.25 ن**

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المتحرك (d_m) ذو المعادلة $y=x+m$.

ومنه المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (d_m) مرتين من أجل: $m>-1$.

إذن قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=x+m$ حلين مختلفين هي: $m\in]-1;+\infty[$.

(III

1 تبيين أن h دالة زوجية: **0.25 ن**

لدينا: $x\in D_h$

معناه: $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

معناه: $x<-1$ أو $-1<x<1$ أو $x>1$

معناه: $-x>1$ أو $1>-x>-1$ أو $-x<-1$

معناه: $(-x)\in]1;+\infty[$ أو $(-x)\in]-1;1[$

أو $(-x)\in]-\infty;-1[$

معناه: $(-x) \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

ومنه: $(-x) \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية.

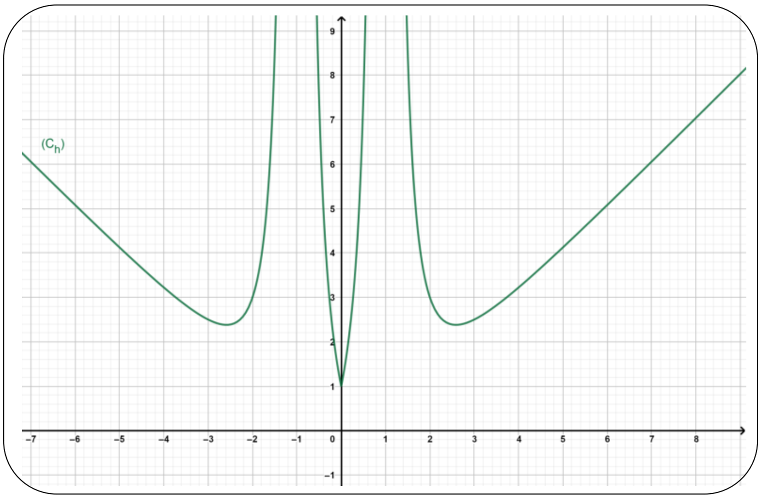
2 شرح كيفية إنشاء (C_h): 0.25 ن

ولدينا: $h(x) = f(|x|)$.

ومنه من أجل $x \geq 0$، يكون (C_h) منطبقا على (C_f).

ومن أجل $x \leq 0$، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')

- إنشاء (C_h): 0.5 ن

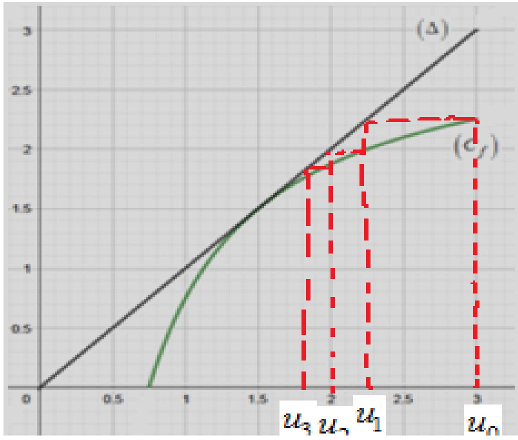


إنتهى تصحيح الموضوع الأول

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الاول : (4 نقاط)

1-أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل : **(0.5)**



ب) من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة **(0.25)**

2) البرهان بالتراجع ، من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ \frac{3}{2}$

☜ من اجل $n=0$: $u_0 = 3 \succ \frac{3}{2}$ محققة . **(0.5)**

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي $u_n \succ \frac{3}{2}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي $u_{n+1} \succ \frac{3}{2}$)

لدينا : $u_n \succ \frac{3}{2}$ تكافئ : $4u_n \succ 6$ تكافئ : $\frac{1}{4u_n} \prec \frac{1}{6}$

تكافئ : $\frac{-9}{4u_n} \succ \frac{-9}{6}$ تكافئ : $\frac{-9}{4u_n} \succ \frac{-3}{2}$

تكافئ : $3-\frac{9}{4u_n} \succ 3-\frac{3}{2}$ تكافئ : $u_{n+1} \succ \frac{3}{2}$

بما أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : **(0.5)**

$$u_{n+1}-u_n = 3-\frac{9}{4u_n}-u_n$$
$$=\frac{12u_n-9-u_n(4u_n)}{4u_n}$$
$$=\frac{-4u_n^2+12u_n-9}{4u_n}$$

حساب المميز Δ : $\Delta = 12^2-4\times(-4)\times(-9)=0$

ومنه : $x_0=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$

بما ان : $u_n \succ \frac{3}{2}$ فان $-4u_n^2+12u_n-9 \prec 0$ و $4u_n \succ 0$ فان $u_{n+1}-u_n \prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

☜ استنتاج تقارب المتتالية: **(0.25)**

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

☜ بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l **(0.25)**

حيث : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

لنا : $3-\frac{9}{4l}=l$ ومنه : $12l-9=4l^2$ حيث $l \neq 0$

تكافئ : $4l^2-12l+9=0$

حساب المميز Δ : $\Delta=(-12)^2-4\times(4)\times(9)=0$

ومنه : $x_0=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{3}{2}$.

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$$v_n=\frac{2}{2u_n-3}$$

أ) البرهان ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{2}{3}$: **(0.5)**

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{2u_{n+1}-3}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{2}{2\left(3-\frac{9}{4u_n}\right)-3}-\frac{2}{2u_n-3}$$
$$=\frac{2}{6-\frac{18}{4u_n}-3}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{2}{3-\frac{9}{2u_n}}-\frac{2}{2u_n-3}$$
$$=\frac{2}{\frac{6u_n-9}{2u_n}}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{4u_n}{6u_n-9}-\frac{2\times3}{(2u_n-3)\times3}$$
$$=\frac{4u_n}{6u_n-9}-\frac{6}{6u_n-9}=\frac{4u_n-6}{6u_n-9}=\frac{2(2u_n-3)}{3(2u_n-3)}=\frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{2}{3}$

ب) كتابة v_n بدلالة n : **(0.25)**

حساب الحد الاول : $v_0=\frac{2}{2u_0-3}=\frac{2}{2\times3-3}=\frac{2}{3}$

لدينا : $v_n = v_0 + nr$

ومنه: $v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n = \frac{2+2n}{3}$

☜ استنتاج (u_n) بدلالة n : **(0.5)**

لنا: $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n} = \frac{2u_n - 3}{2}$

تكافئ : $\frac{2}{v_n} = 2u_n - 3$ تكافئ : $2u_n = \frac{2}{v_n} + 3$

تكافئ : $u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2}$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2+2n} + \frac{3}{2}$

تكافئ : $u_n = \frac{3}{2(1+n)} + \frac{3}{2}$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1+n)} + 1\right)$

تكافئ : $u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1+1+n}{1+n}\right)$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

3) حساب المجموع : **(0.5)**

لنا :

$$u_n v_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \frac{2+2n}{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \frac{2(n+1)}{3} = n+2$$

ومنه :

$$S_n = u_n v_n + u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + \dots + u_{n+2021}.v_{n+2021}$$
$$= \frac{n+2021-n+1}{2}(n+2+(n+2021)+2)$$
$$= \frac{2022}{2}(2n+2025)$$
$$= 2022n + 2047275$$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1) أ- تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$: **(0.5)**

لدينا : $\ln(x_0 - y_0) = 0$ تكافئ : $x_0 - y_0 = e^0$

(حيث : $x_0 - y_0 \succ 0$) تكافئ : $x_0 - y_0 = 1$

ومنه : $x_0 = 1 + y_0$

بالتعويض في المعادلة (E) نجد :

$3(y_0+1) - 5y_0 = 1$ ومنه: $-2y_0 + 3 = 1$: أي

$y_0 = \frac{1-3}{-2} = 1$ ومنه : $x_0 = 2$.

ب- استنتاج حلول المعادلة (E) : **(0.5)**

☜ تعيين حلول المعادلة (E'):

$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3(2) - 5(1) = 1 \end{cases}$ تكافئ : $3(x-2) - 5(y-1) = 0$

تكافئ : $3(x-2) = 5(y-1)$

لنا 3 يقسم $5(y-1)$ ولكن 3 اولي مع 5 أي حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $y-1$ ومنه $y-1 = 3k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $y = 3k+1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و بالتعويض نجد : $3x - 5(3k+1) = 1$

ومنه : $x = 5k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

أي حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$ هي من الشكل :

$(5k+2; 3k+1)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2) a و b عددان صحيحان و λ العدد الذي يحقق :

$$\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$$

أ- بيان أن $(b;a)$ حل للمعادلة (E): **(0.5)**

لنا: $\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$ ومنه : $3b+2 = 5a+3$

أي : $3b - 5a = 3-2$ ومنه : $3b - 5a = 1$

معناه $(b;a)$ حل للمعادلة (E)

ب- تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد λ على 15: **(0.5)**

لنا: $\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda \equiv 2[3] \\ \lambda \equiv 3[5] \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} 5\lambda \equiv 10[15] \\ 3\lambda \equiv 9[15] \end{cases}$ تكافئ : $2\lambda \equiv 1[15]$

تكافئ : $2\lambda \equiv 16[15]$ (2 اولي مع 15)

ومنه : $\lambda \equiv 8[15]$ أي باقي قسمة λ على 15 هو 8 .

3) n عدد طبيعي يحقق : $\begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$.

- تعين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n \prec 2021$:

(0.5)

لنا : $\begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$ ومنه : $n = \lambda$

أي: $n = 15q+8$ حيث $q \in \mathbb{Z}$.

لنا : $n \prec 2021$ أي $15q + 8 \prec 2021$

اذن : $q \prec \frac{2021-8}{15}$ أي : $q \prec 134.2$

ومنه بأخذ : $q = 134$ نجد $n = 2018$.

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 3\alpha 03}$ في نظام تعداد أساسه 6 .

أ- تعين α و β حيث الثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E): **(1)**

لنا $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) معناه :

$\begin{cases}\alpha = x = 5k+2\\ \beta = y = 3k+1\end{cases}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ومن جهة اخرى : $0 \le \alpha \le 5$ و $0 \prec \beta \le 5$

لدينا : $0 \prec \beta \le 5$ ومنه : $0 \prec 3k+1 \le 5$

ومنه : $\frac{0-1}{3} \prec k \le \frac{5-1}{3}$ أي : $\frac{-1}{3} \prec k \le \frac{4}{3}$

ومنه : $k=0$ أو $k=1$

- اذا كان $k=0$ فان $\alpha=2$ و $\beta=1$ مقبولة .
- اذا كان $k=1$ فان $\alpha=7$ و $\beta=4$ مرفوضة

لان $0 \le \alpha \le 5$ ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) هي : $(2;1)$

ب- كتابة N في النظام العشري : **(0.5)**

$N = \overline{\beta 3\alpha 03}$

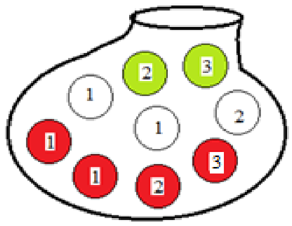
لنا : $= 3+0\times 6^1+\alpha\times 6^2+3\times 6^3+\beta\times 6^4$

$= 651+36\alpha+1296\beta$

بالتعويض نجد : $N = 2019$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

I- كيس يحوي تسع كريات (لا نفرق بينها باللمس) ، ثلاثة بيضاء مرقمة 1 ، 1 و2 و أربعة حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 و 3 واثنان خضراء مرقمة 2 و 3 .



☜ نسحب عشوائيا على التوالي بدون ارجاع 3 كريات من هذا الكيس (ترتيبة).

1) حساب عدد السحبات الممكنة : $A_9^3 = 504$ **(0.25)**

2) حساب احتمال الحوادث التالية :

- الحدث A : " سحب كرية من كل لون " . **(0.5)**

معناه: " 3 كريات مختلفة في اللون "

أي :

ومنه : $P(A) = \frac{A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times 6}{A_9^3} = \frac{2}{7}$

- الحدث B : " سحب كريات من نفس اللون " . **(0.5)**

أي : أو

بالنسبة للخضراء فعددها غير كاف .

$P(B) = \frac{A_4^3 + A_3^3}{A_9^3} = \frac{5}{84}$

- الحدث C : " سحب كريات تحمل نفس الرقم ". **(0.5)**

هنا نهتم فقط بالأرقام لا بالألوان .

أي : 1 1 1 أو 2 2 2

بالنسبة للعدد 3 فعدد الكرات التي تحمل الرقم 3 غير كافية .

ومنه : $P(C) = \frac{A_4^3 + A_3^3}{A_9^3} = \frac{5}{84}$

- الحدث D : " سحب كريات تحمل نفس الرقم و مختلفة في اللون " (هنا نهتم باللون والرقم معا). **(0.5)**

ومنه نجد هذه السحبة فقط : 2 2 2

$P(D) = \frac{A_1^1 \times A_1^1 \times A_1^1 \times 6}{A_9^3} = \frac{1}{84}$

II- نسحب من الكيس السابق كريتين في آن واحد ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين اللذان تحملانها الكريتين المسحوبتين .

1- عين قيم المتغير العشوائي X : $X \in \{2;3;4;5;6\}$ **(0.25)**

2- حدد قانون احتمال X : **(1)**

$P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$

$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \frac{1}{3}$

$P(X=4) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \frac{11}{36}$

$P(X=5) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{6}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$

$X = x_i$	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

3- حساب كل من الامل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X :

الامل الرياضياتي : (0.5)

$$E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{11}{36}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{36}$$
$$=\frac{32}{9}$$

التباين : (0.5)

$$V(X)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{11}{36}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{36}-\left[E^2(X)\right]$$
$$=\frac{247}{18}-\left(\frac{32}{9}\right)^2$$
$$=\frac{175}{162}$$

الانحراف المعياري : (0.5)

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$=\sqrt{\frac{175}{162}}\approx 1.04$$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I-1) النهايات : (0.5)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=0+2-(-\infty)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty\times(+\infty)=+\infty\end{cases}$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : (0.5)

المشتقة : من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$$

اشارة المشتقة واتجاه تغيرها :

اشارة $g'(x)$ من اشارة $2x^2-2$ (لان $x\succ 0$).

$2x^2-2=0$ تكافئ : $x^2=1$ تكافئ : $\begin{cases}x=1\in\,]0;+\infty[\\ \text{و}\\ x=-1\notin\,]0;+\infty[\end{cases}$

ومنه :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
اتجاه تغير g	متناقصة تماما		متزايدة تماما

جدول تغيرات الدالة g : (0.25)

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

3) اشارة $g(x)$: (0.25)

لدينا من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\geq g(1)$

ومنه $g(x)\geq 3$ أي : $g(x)\succ 0$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=-x+e-2\frac{\ln(x)}{x}$$

1) النهايات : (0.5)

$$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-0+e-2\frac{\ln(0^+)}{0^+}=e-2(-\infty)=+\infty$$
$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty-2\times0=-\infty$$

* المنحنى **(Cf)** يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته x=0

2) من اجل أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$

فان : (0.5)

$$f'(x)=-1+0-2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}$$
$$=-1-2\times\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{-g(x)}{x^2}$$

3) اشارة $f'(x)$: عكس اشارة $g(x)$ أي من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)\prec 0$

جدول تغيرات الدالة f : (0.5)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) أ) بيان أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) : (0.5)

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+e-2\frac{\ln x}{x}-(-x+e)\right]$$
$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2\frac{\ln x}{x}\right]=-2\times0=0$$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ): **(0.5)**

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y=\dfrac{-2\ln x}{x}$

اشارة الفرق من اشارة $-2\ln x$ لأن $x \succ 0$

لدينا : $-2\ln x=0$ تكافئ : $\ln x=0$ تكافئ : $x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	فوق	متقاطعان في $(1;-1+e)$	تحت	

5) بيان انه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) : **(0.5)**

$f'(x)=-1$ تكافئ : $\dfrac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}=-1$

تكافئ : $-x^2-2+2\ln x=-x^2$ تكافئ :

$-2+2\ln x=0$ تكافئ : $\ln x=1$ تكافئ : $x=e$.

ومنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=e$.

- تعيين معادلة للمماس (T):

$$(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$$
$$=-1(x-e)-\frac{2}{e}$$
$$=-x+e-\frac{2}{e}$$
$$=-x+\frac{e^2-2}{e}$$

6) لدينا f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال **(0.5)**

$[2;2.1]$ ولدينا $f(2)\approx 0.02$ ، $f(2.1)\approx -0.08$

أي : $f(2)\times f(2.1)\prec 0$

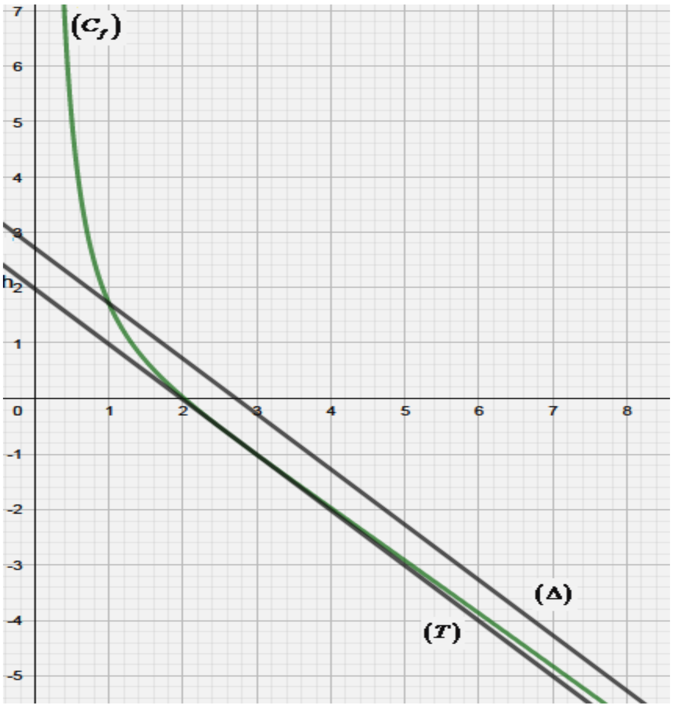
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث :

$2\prec \alpha \prec 2.1$.

☜ اشارة $f(x)$: **(0.5)**

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$		$-$	

7) الانشاء : **(1)**



8) المناقشة البيانية : **(0.5)**

لدينا : $x(e-m)=\ln(x^2)$ تكافئ :

$x(e-m)=2\ln(x)$ تكافئ : $e-m=\dfrac{2\ln(x)}{x}$

تكافئ : $m-e=-\dfrac{2\ln(x)}{x}$

تكافئ : $m=e-\dfrac{2\ln(x)}{x}$

تكافئ : $-x+m=-x+e-\dfrac{2\ln(x)}{x}$

ومنه : $f(x)=-x+m$ (مناقشة مائلة) .

- اذا كان $m\in\left]-\infty;\dfrac{e^2-2}{e}\right[$: لا توجد حلول .
- اذا كان $m=\dfrac{e^2-2}{e}$: يوجد حل هو $x=e$.
- اذا كان $m\in\left]\dfrac{e^2-2}{e};e\right[$: يوجد حلان .
- اذا كان $m=e$: يوجد حل هو $x=1$.
- اذا كان $m\in\left]e;+\infty\right[$: يوجد حل واحد .

إنتهى تصحيح الموضوع الثاني